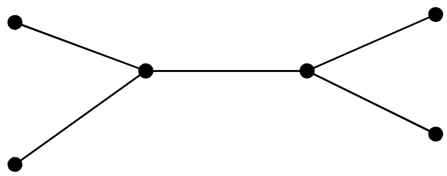
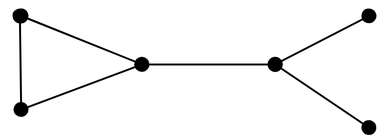
Árboles

Un grafo sin lazos $G = (V, E)$ es un árbol si es conexo y no contiene ciclos.

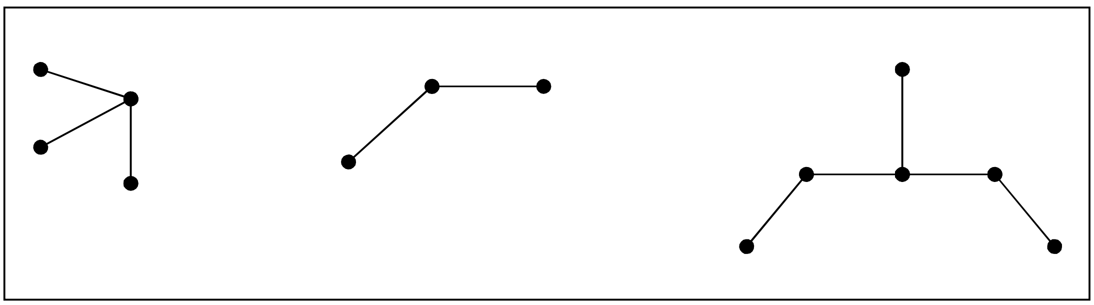
Ejemplos



G_1



G_2



G_3

Tenemos que:

G_1 es un árbol.

G_2 no es un árbol porque contiene un ciclo.

G_3 no es un árbol porque no es conexo. Sin embargo, cada componente conexa es un árbol y, este tipo de grafo se llama **bosque**.

Nótese también que G_1 es un subgrafo recubridor de G_2. Decimos entonces que G_1 es un árbol recubridor de G_2.

Puede pensarse en un árbol recubridor de un grafo como aquel que proporciona una conectividad minimal para el grafo o como un "esqueleto" minimal que une los vértices.

Veremos ahora algunas propiedades de los árboles.

Teorema

Si a y b son vértices distintos en un árbol $T = (V, E)$ entonces hay un único camino que conecta a estos dos vértices.

Demostración

Como T es un árbol, T es conexo y, por lo tanto hay un camino $a - b$. Si hubiese otro camino $a - b$ diferente al anterior, entonces se tendría un ciclo y el grafo no sería un árbol.

Teorema

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y solo si él tiene un árbol recubridor.

Demostración

$\Leftarrow$ Si G tiene un árbol recubridor, entonces para cualquier par de vértices del grafo hay un camino entre ellos y, por lo tanto, el grafo es conexo.

$\Rightarrow$ Si G es conexo y no es un árbol (si fuese un árbol, él sería el árbol recubridor), entonces G debe contener un ciclo C_0. Eliminamos un lado e_0 de C_0 y obtenemos el grafo $G_1 = G - e_0$. Si G_1 no es un árbol contiene un ciclo C_1. Eliminamos un lado e_1 de C_1 y obtenemos el grafo $G_2 = G_1 - e_1$. Continuando este proceso, obtenemos un árbol recubridor de G.

Teorema

En cualquier árbol $T = (V, E)$ se verifica que:

$$|V| = |E| + 1$$

Demostración

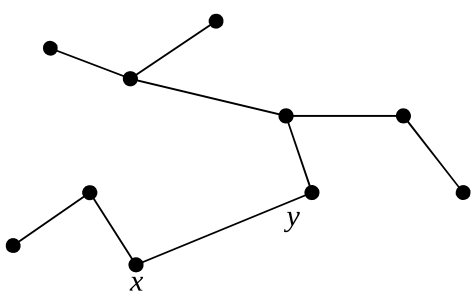
Por inducción sobre $|E|$ (número de lados).

Si $|E| = 0$, entonces $|V| = 1$.

Si $|E| = 1$, entonces $|V| = 2$.

Suponemos que es teorema es cierto para todo árbol con t lados y $0 \leq t \leq k$.

Sea $T = (V, E)$ un árbol con $|E| = k + 1$.



Eliminamos de T el lado $\{x, y\}$, entonces obtenemos dos árboles $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ tales que:

$$|V| = |V_1| + |V_2| \quad \text{y} \quad |E| = |E_1| + |E_2| + 1$$

Como $|E_1| \leq k$ y $|E_2| \leq k$, por la hipótesis de inducción tenemos que:

$$|V_1| = |E_1| + 1 \quad \text{y} \quad |V_2| = |E_2| + 1$$

Luego:

$$|V| = |V_1| + |V_2| = |E_1| + 1 + |E_2| + 1 = |E| + 1$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema

Para cualquier árbol $T = (V, E)$, si $|V| \geq 2$ entonces T tiene, al menos, dos vértices colgantes (de grado 1).

Demostración

Sea $|V| = n \geq 2$, entonces por el teorema anterior $|E| = n - 1$.

Como $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$, tenemos que $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2(n - 1)$.

Como T es conexo, $\delta(v) > 1$ para todo vértice v. Por reducción a lo absurdo, supongamos que T tiene menos de dos vértices colgantes, entonces:

a) No tiene ninguno ($\delta(v) \geq 2$ para todo vértice v)

   En este caso se tendría $\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2n$, de donde $2(n - 1) \geq 2n$, lo que es una contradicción.

b) Hay un solo vértice colgante v_0 ($\delta(v_0) = 1$)

   En este caso se tendría $\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 1 + 2(n - 1)$, de donde $2(n - 1) \geq 1 + 2(n - 1)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, existen al menos dos vértices colgantes.

Teorema

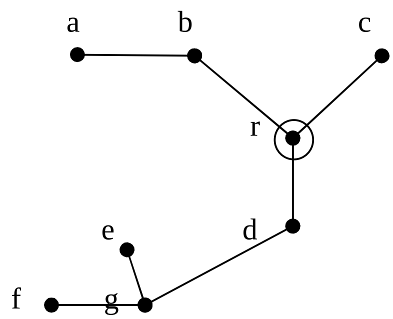
Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) G es un árbol.
2) G es conexo, pero si se elimina cualquiera de sus lados, G queda desconectado en dos subgrafos que son árboles.
3) G no contiene ciclos y $|V| = |E| + 1$.
4) G es conexo y $|V| = |E| + 1$.
5) G no contiene ciclos y si $a, b \in V$ con $\{a, b\} \notin E$, entonces el grafo que se obtiene al añadir el lado $\{a, b\}$ tiene un ciclo.

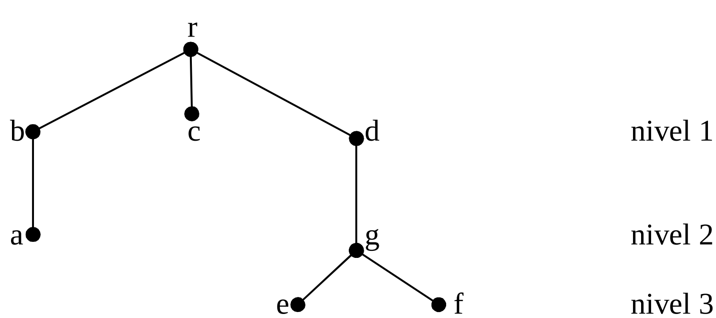
Árboles con Raiz

Un árbol con raíz es un árbol que tiene un vértice particular designado como raíz.

Ejemplo



Este árbol puede dibujarse de la siguiente manera:



Si T es un árbol con raíz, el nivel del vértice v es la longitud del camino que va de la raíz hasta v. La altura de un árbol con raíz es el valor del nivel máximo (en el ejemplo el árbol tiene altura 3).

Sea T es un árbol con raíz v_0. Sean x, y, z vértices de T y $v_0, v_1, \dots, v_n$ un camino en T. Entonces:

1) v_{i-1} es padre de v_i y v_i es hijo de v_{i-1}.
2) $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ son antepasados de v_n.
3) Si x es antepasado de y, entonces y es descendiente de x.
4) Si x y y son hijos de z, entonces x y y son hermanos.
5) Si x no tiene hijos, entonces x es un vértice terminal, vértice colgante o una hoja.
6) Si x no es un vértice colgante, entonces se llama vértice interno.
7) El subgrafo de T que consiste en x y todos sus descendientes es el subgrafo de T que tiene a x como raíz.

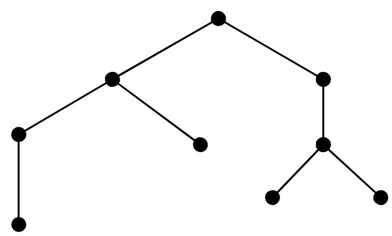
Árboles Binarios

Un árbol con raíz es un árbol binario si cada vértice tiene, a lo más, dos hijos.

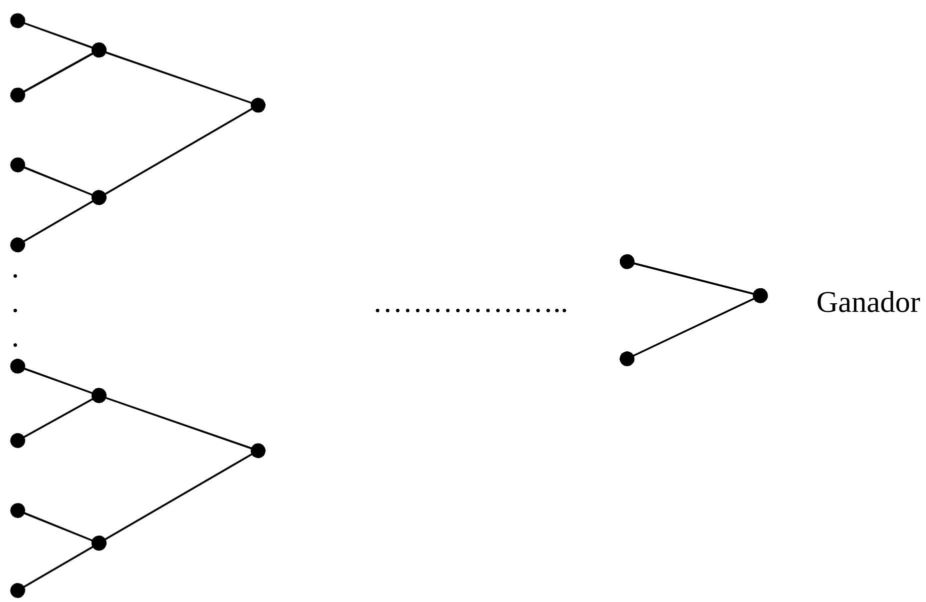
Un árbol con raíz es un árbol binario completo si todo vértice interno tiene exactamente dos hijos.

Ejemplos

(1) El siguiente es un árbol binario (no es binario completo)



(2) El grafo de un torneo de eliminación simple es un árbol binario completo:



Teorema

Si T es un árbol binario completo con i vértices internos, entonces T tiene $i+1$ hojas y $2i+1$ vértices en total.

Demostración

Como cada vértice interno tiene exactamente dos hijos el número total de vértices es $2i+1$ ($2i$ porque por cada i hay dos hijos y 1 por la raíz).

Además, el número de hojas es: total de vértices – vértices internos; es decir:

$$2i+1-i=i+1$$

Ejemplo

Si hay 60 participantes en un torneo de eliminación simple, ¿cuántos partidos habrá?

Solución

Hay 60 hojas (los participantes en el torneo)

Los partidos son los vértices internos.

Luego, por el teorema anterior, habrá 59 juegos.

El concepto de árbol binario se puede generalizar:

Un árbol con raíz es un árbol m-ario ($m \in \mathbb{Z}^+$) si cada vértice tiene, a lo más, m hijos.

Un árbol con raíz es un árbol m-ario completo si todo vértice interno tiene exactamente m hijos.

Teorema

Sea T es un árbol m-ario completo con $|V| = n$. Si T tiene i vértices internos y h hojas, entonces se tiene:

Número total de vértices: $n = mi + 1$

Número de hojas: $h = (m-1)i + 1$